



Ферми-газ

Идеальный **Ферми-газ** - это состояние вещества, которое представляет собой совокупность множества невзаимодействующих фермионов. Фермионы – это частицы, которые подчиняются статистике Ферми-Дирака, такие как электроны, протоны и нейтроны, и, в общем, частицы с полуцелым спином. Эти статистические данные определяют распределение энергии фермионов в ферми-газе в состоянии теплового равновесия и характеризуются их численной плотностью, температурой и набором доступных энергетических состояний. Модель названа в честь итальянского физика Энрико Ферми.^[1]

Эта физическая модель может быть точно применена ко многим системам со многими фермионами. Некоторыми ключевыми примерами являются поведение носителей заряда в металле, нуклонов в атомном ядре, нейтронов в нейтронной звезде и электронов в белом карлике.

Описание

Идеальный Ферми-газ или свободный Ферми-газ - это физическая модель, предполагающая совокупность невзаимодействующих фермионов в постоянной потенциальной яме. Фермионы являются элементарными или составными частицами с полуцелым спином, таким образом, следуя статистике Ферми-Дирака. Эквивалентная модель для частиц с целым спином называется бозе-газом (ансамбль невзаимодействующих бозонов). При достаточно низкой численной плотности частиц и высокой температуре как ферми-газ, так и бозе-газ ведут себя как классический идеальный газ.^[2]

Согласно принципу исключения Паули, ни одно квантовое состояние не может быть занято более чем одним фермионом с идентичным набором квантовых чисел. Таким образом, невзаимодействующий ферми-газ, в отличие от бозе-газа, концентрирует небольшое количество частиц на энергию. Таким образом, ферми-газу запрещено конденсироваться в конденсат Бозе-Эйнштейна, хотя слабо взаимодействующие ферми-газы могут образовывать куперовскую пару и конденсат (также известный как режим кроссовера BCS-BEC).^[3] Полная энергия ферми-газа при абсолютном нуле больше, чем сумма одночастичных основных состояний, потому что

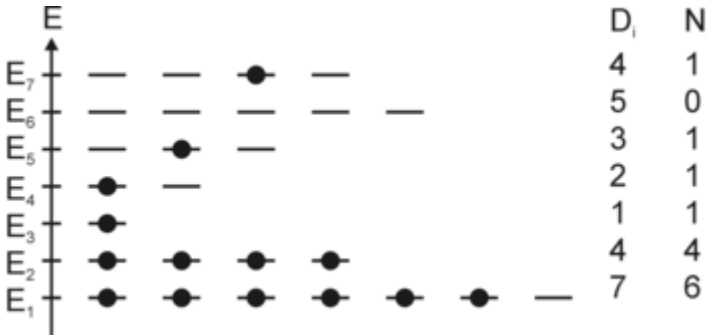


Иллюстрация энергетических состояний: Диаграмма распределения энергии для системы с 7 энергетическими уровнями энергия E_i вырождается D_i в разы (есть D_i состояния, которые имеют энергию E_i) и имеет заполняемость, заданную N_i , с $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Согласно принципу исключения Паули, до $(2j + 1) \cdot D_i$ фермионов могут занимать уровень энергии E_i системы, где j - спин фермионов.

принцип Паули подразумевает своего рода взаимодействие или давление, которое удерживает фермионы разделенными и движущимися. По этой причине давление ферми-газа ненулевое даже при нулевой температуре, в отличие от классического идеального газа.

Например, это так называемое давление вырождения стабилизирует нейтронную звезду (ферми-газ из нейтронов) или звезду-белого карлика (Ферми-газ из электронов) против внутреннего притяжения гравитации, которое якобы привело бы к коллапсу звезды в черную дыру. Только когда звезда достаточно массивна, чтобы преодолеть давление вырождения, она может коллапсировать в сингулярность.

Можно определить температуру Ферми, ниже которой газ можно считать вырожденным (его давление определяется почти исключительно принципом Паули). Эта температура зависит от массы фермионов и плотности энергетических состояний.

Основное предположение модели свободных электронов для описания делокализованных электронов в металле может быть получено из ферми-газа. Поскольку взаимодействиями пренебрегают из-за эффекта экранирования, проблема рассмотрения равновесных свойств и динамики идеального Ферми-газа сводится к изучению поведения отдельных независимых частиц. В этих системах температура Ферми обычно составляет многие тысячи кельвинов, поэтому в приложениях для людей электронный газ можно считать вырожденным. Максимальная энергия фермионов при нулевой температуре называется **энергией Ферми**. Энергетическая поверхность Ферми в обратном пространстве известна как поверхность Ферми.

Модель почти свободных электронов адаптирует модель газа Ферми для рассмотрения кристаллической структуры металлов и полупроводников, где электроны в кристаллической решетке замещаются блоховскими электронами с соответствующим импульсом кристалла. Таким образом, периодические системы все еще относительно податливы, и модель служит отправной точкой для более продвинутых теорий, которые имеют дело с взаимодействиями, например, с использованием теории возмущений.

Одномерный однородный газ

Одномерная бесконечная квадратная яма длиной L является моделью одномерной коробки с потенциальной энергией:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x_c - \frac{L}{2} < x < x_c + \frac{L}{2}, \\ \infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Это стандартная модель-система в квантовой механике, для которой решение для отдельной частицы хорошо известно. Поскольку потенциал внутри ячейки однороден, эта модель называется одномерным однородным газом,^[4] даже несмотря на то, что фактический профиль плотности газа может иметь узлы и антиузлы, когда общее количество частиц невелико.

Уровни обозначаются одним квантовым числом n , а энергии задаются:

$$E_n = E_0 + \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2.$$

где E_0 - энергия нулевой точки (которая может быть выбрана произвольно как форма калибровочной фиксации), m масса отдельного фермиона и \hbar - приведенная постоянная Планка.

Для N фермионов со спин- $1/2$ в квадрате не более двух частиц могут обладать одинаковой энергией, т. е. две частицы могут обладать энергией E_1 , две другие частицы могут обладать энергией E_2 и так далее. Две частицы с одинаковой энергией имеют спин $1/2$ (раскручивание) или $-1/2$ (вращение вниз), приводящее к двум состояниям для каждого энергетического уровня. В конфигурации, для которой полная энергия наименьшая (основное состояние), все энергетические уровни вплоть до $n = N/2$ заняты, а все более высокие уровни пусты.

Определяя ссылку для энергии Ферми как E_0 , энергия Ферми, следовательно, задается

$$E_F^{(1D)} = E_n - E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \left(\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \right)^2,$$

где $\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ - минимальная функция, вычисляемая при $n = N/2$.

Термодинамический предел

В термодинамическом пределе общее число частиц N настолько велико, что квантовое число n можно рассматривать как непрерывную переменную. В этом случае общий профиль плотности числа в ячейке действительно однороден.

Число квантовых состояний в диапазоне $n_1 < n < n_1 + dn$ равно:

$$D_n(n_1) dn = 2 dn.$$

Без потери общности энергия нулевой точки выбирается равной нулю со следующим результатом:

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2 \implies dE = \frac{\hbar^2 \pi^2}{mL^2} n dn = \frac{\hbar \pi}{L} \sqrt{\frac{2E}{m}} dn.$$

Следовательно, в диапазоне:

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n_1^2 < E < E_1 + dE,$$

число квантовых состояний равно:

$$D_n(n_1) dn = 2 \frac{dE}{dE/dn} = \frac{2}{\frac{\hbar^2 \pi^2}{mL^2} n} dE \equiv D(E_1) dE.$$

Здесь степень вырождения равна:

$$D(E) = \frac{2}{dE/dn} = \frac{2L}{\hbar\pi} \sqrt{\frac{m}{2E}}.$$

А плотность состояний равна:

$$g(E) \equiv \frac{1}{L} D(E) = \frac{2}{\hbar\pi} \sqrt{\frac{m}{2E}}.$$

В современной литературе^[4] указанное $D(E)$ иногда также называют "плотностью состояний". Однако, $g(E)$ отличается от $D(E)$ на коэффициент объема системы (который является L в данном ОДНОМЕРНОМ случае).

На основе следующей формулы:

$$\int_0^{E_F} D(E) dE = N,$$

энергия Ферми в термодинамическом пределе может быть рассчитана как:

$$E_F^{(1D)} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \left(\frac{N}{2} \right)^2.$$

3D uniform gas

The three-dimensional isotropic and non-relativistic uniform Fermi gas case is known as the *Fermi sphere*.

A three-dimensional infinite square well, (i.e. a cubical box that has a side length L) has the potential energy

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0, & -\frac{L}{2} < x, y, z < \frac{L}{2}, \\ \infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The states are now labelled by three quantum numbers n_x , n_y , and n_z . The single particle energies are

$$E_{\mathbf{n}} = E_0 + \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

$$E_{n_x, n_y, n_z} = E_0 + \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2),$$

где n_x, n_y, n_z - положительные целые числа. В этом случае несколько состояний имеют одинаковую энергию (известную как вырожденные энергетические уровни), например $E_{211} = E_{121} = E_{112}$.

Thermodynamic limit

When the box contains N non-interacting fermions of spin $1/2$, it is interesting to calculate the energy in the thermodynamic limit, where N is so large that the quantum numbers n_x, n_y, n_z can be treated as continuous variables.

With the vector $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$, each quantum state corresponds to a point in 'n-space' with energy

$$E_{\mathbf{n}} = E_0 + \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} |\mathbf{n}|^2$$

With $|\mathbf{n}|^2$ denoting the square of the usual Euclidean length $|\mathbf{n}| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$. The number of states with energy less than $E_F + E_0$ is equal to the number of states that lie within a sphere of radius $|\mathbf{n}_F|$ in the region of n-space where n_x, n_y, n_z are positive. In the ground state this number equals the number of fermions in the system:

$$N = 2 \times \frac{1}{8} \times \frac{4}{3} \pi n_F^3$$

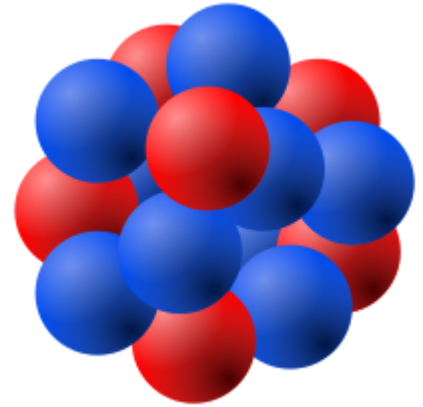
The factor of two expresses the two spin states, and the factor of $1/8$ expresses the fraction of the sphere that lies in the region where all n are positive.

$$n_F = \left(\frac{3N}{\pi} \right)^{1/3}$$

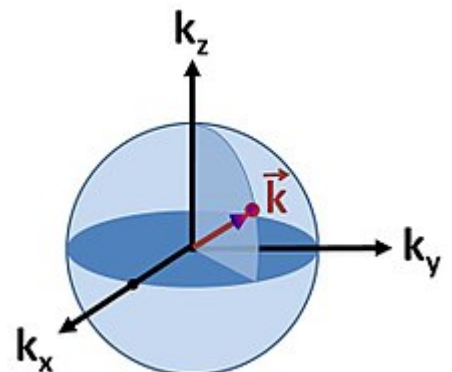
Энергия Ферми определяется

$$E_F = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n_F^2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \left(\frac{3N}{\pi} \right)^{2/3}$$

Which results in a relationship between the Fermi energy and the number of particles per volume (when L^2 is replaced with $V^{2/3}$):



A model of the atomic nucleus showing it as a compact bundle of the two types of nucleons: protons (red) and neutrons (blue). As a first approximation, the nucleus can be treated as composed of non-interacting proton and neutron gases.



The free fermions that occupy the lowest energy states form a sphere in reciprocal space. The surface of this sphere is the Fermi surface.

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{2/3}$$

This is also the energy of the highest-energy particle (the N th particle), above the zero point energy E_0 . The N' th particle has an energy of

$$E_{N'} = E_0 + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 N'}{V} \right)^{2/3} = E_0 + E_F|_{N'}$$

The total energy of a Fermi sphere of N fermions (which occupy all N energy states within the Fermi sphere) is given by:

$$E_T = NE_0 + \int_0^N E_F|_{N'} dN' = \left(\frac{3}{5} E_F + E_0 \right) N$$

Therefore, the average energy per particle is given by:

$$E_{av} = E_0 + \frac{3}{5} E_F$$

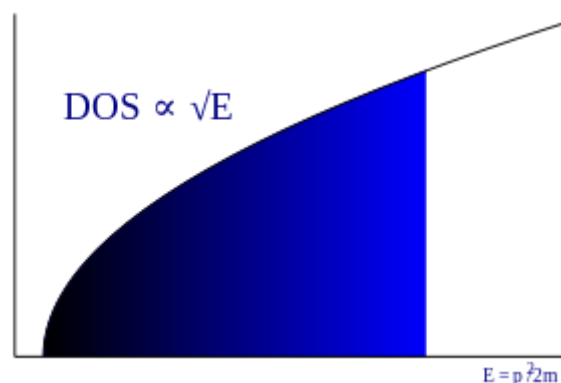
Density of states

For the 3D uniform Fermi gas, with fermions of spin-1/2, the number of particles as a function of the energy $N(E)$ is obtained by substituting the Fermi energy by a variable energy $(E - E_0)$:

$$N(E) = \frac{V}{3\pi^2} \left[\frac{2m}{\hbar^2} (E - E_0) \right]^{3/2},$$

from which the density of states (number of energy states per energy per volume) $g(E)$ can be obtained. It can be calculated by differentiating the number of particles with respect to the energy:

$$g(E) = \frac{1}{V} \frac{\partial N(E)}{\partial E} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E - E_0}.$$



Density of states (DOS) of a Fermi gas in 3-dimensions

This result provides an alternative way to calculate the total energy of a Fermi sphere of N fermions (which occupy all N energy states within the Fermi sphere):

$$\begin{aligned} E_T &= \int_0^N E dN(E) = EN(E)|_0^N - \int_{E_0}^{E_0+E_F} N(E) dE \\ &= (E_0 + E_F)N - \int_0^{E_F} N(E) d(E - E_0) \\ &= (E_0 + E_F)N - \frac{2}{5} E_F N(E_F) = \left(E_0 + \frac{3}{5} E_F \right) N \end{aligned}$$

Thermodynamic quantities

Degeneracy pressure

By using the first law of thermodynamics, this internal energy can be expressed as a pressure, that is

$$P = -\frac{\partial E_T}{\partial V} = \frac{2}{5} \frac{N}{V} E_F = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5m} \left(\frac{N}{V} \right)^{5/3},$$

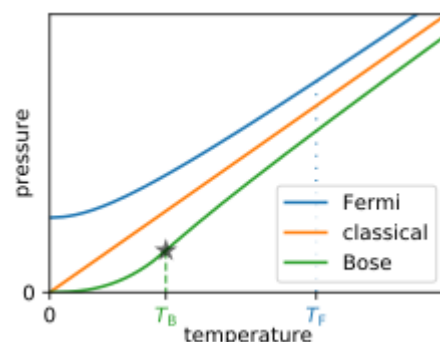
где это выражение остается справедливым для температур, намного меньших, чем температура Ферми. Это давление известно как **давление вырождения**. В этом смысле системы, состоящие из фермионов, также называются вырожденной материей.

Standard stars avoid collapse by balancing thermal pressure (plasma and radiation) against gravitational forces. At the end of the star lifetime, when thermal processes are weaker, some stars may become white dwarfs, which are only sustained against gravity by electron degeneracy pressure. Using the Fermi gas as a model, it is possible to calculate the Chandrasekhar limit, i.e. the maximum mass any star may acquire (without significant thermally generated pressure) before collapsing into a black hole or a neutron star. The latter, is a star mainly composed of neutrons, where the collapse is also avoided by neutron degeneracy pressure.

For the case of metals, the electron degeneracy pressure contributes to the compressibility or bulk modulus of the material.

Chemical potential

Assuming that the concentration of fermions does not change with temperature, then the total chemical potential μ (Fermi level) of the three-dimensional ideal Fermi gas is related to the zero temperature Fermi energy E_F by a Sommerfeld expansion (assuming $k_B T \ll E_F$):



Pressure vs temperature curves of classical and quantum ideal gases (Fermi gas, Bose gas) in three dimensions. Pauli repulsion in fermions (such as electrons) gives them an additional pressure over an equivalent classical gas, most significantly at low temperature.

$$\mu(T) = E_0 + E_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{E_F} \right)^2 - \frac{\pi^4}{80} \left(\frac{k_B T}{E_F} \right)^4 + \dots \right],$$

где T - температура.^{[5][6]}

Hence, the internal chemical potential, $\mu - E_0$, is approximately equal to the Fermi energy at temperatures that are much lower than the characteristic Fermi temperature T_F . This characteristic temperature is on the order of 10^5 K for a metal, hence at room temperature (300 K), the Fermi energy and internal chemical potential are essentially equivalent.

Typical values

Metals

Under the free electron model, the electrons in a metal can be considered to form a uniform Fermi gas. The number density N/V of conduction electrons in metals ranges between approximately 10^{28} and 10^{29} electrons per m^3 , which is also the typical density of atoms in ordinary solid matter. This number density produces a Fermi energy of the order:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 \cdot 10^{28} \sim 29 \text{ m}^{-3})^{2/3} \approx 2 \sim 10 \text{ eV},$$

где m_e - масса покоя электрона.^[7] Эта энергия Ферми соответствует температуре Ферми порядка 10^6 кельвинов, что намного выше температуры поверхности Солнца. Любой металл будет кипеть до достижения этой температуры при атмосферном давлении. Таким образом, для любых практических целей металл можно рассматривать как ферми-газ при нулевой температуре в первом приближении (нормальные температуры малы по сравнению с T_F).

White dwarfs

Stars known as white dwarfs have mass comparable to the Sun, but have about a hundredth of its radius. The high densities mean that the electrons are no longer bound to single nuclei and instead form a degenerate electron gas. The number density of electrons in a white dwarf is of the order of 10^{36} electrons/ m^3 . This means their Fermi energy is:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{3\pi^2 (10^{36})}{1 \text{ m}^3} \right)^{2/3} \approx 3 \times 10^5 \text{ eV} = 0.3 \text{ MeV}$$

Nucleus

Another typical example is that of the particles in a nucleus of an atom. The radius of the nucleus is roughly:

$$R = (1.25 \times 10^{-15} \text{ m}) \times A^{1/3}$$

где A - количество нуклонов.

The number density of nucleons in a nucleus is therefore:

$$\rho = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} \approx 1.2 \times 10^{44} \text{ m}^{-3}$$

This density must be divided by two, because the Fermi energy only applies to fermions of the same type. The presence of neutrons does not affect the Fermi energy of the protons in the nucleus, and vice versa.

The Fermi energy of a nucleus is approximately:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_p} \left(\frac{3\pi^2(6 \times 10^{43})}{1 \text{ m}^3} \right)^{2/3} \approx 3 \times 10^7 \text{ eV} = 30 \text{ MeV},$$

где m_p - масса протона.

The radius of the nucleus admits deviations around the value mentioned above, so a typical value for the Fermi energy is usually given as 38 MeV.

Arbitrary-dimensional uniform gas

Density of states

Using a volume integral on d dimensions, the density of states is:

$$g^{(d)}(E) = g_s \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \delta \left(E - E_0 - \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}|^2}{2m} \right) = g_s \left(\frac{m}{2\pi \hbar^2} \right)^{d/2} \frac{(E - E_0)^{d/2-1}}{\Gamma(d/2)}$$

The Fermi energy is obtained by looking for the number density of particles:

$$\rho = \frac{N}{V} = \int_{E_0}^{E_0 + E_F^{(d)}} g^{(d)}(E) dE$$

To get:

$$E_{\text{F}}^{(d)} = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left(\frac{1}{g_s} \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right) \frac{N}{V} \right)^{2/d}$$

где V - соответствующий d -мерный объем, g_s - размерность внутреннего гильбертова пространства. Для случая со спином $1/2$ каждая энергия дважды вырождена, поэтому в этом случае $g_s = 2$.

A particular result is obtained for $d = 2$, where the density of states becomes a constant (does not depend on the energy):

$$g^{(2D)}(E) = \frac{g_s}{2} \frac{m}{\pi\hbar^2}.$$

Fermi gas in harmonic trap

The harmonic trap potential:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2 + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2$$

is a model system with many applications^[4] in modern physics. The density of states (or more accurately, the degree of degeneracy) for a given spin species is:

$$g(E) = \frac{E^2}{2(\hbar\omega_{\text{ho}})^3},$$

where $\omega_{\text{ho}} = \sqrt[3]{\omega_x\omega_y\omega_z}$ is the harmonic oscillation frequency.

The Fermi energy for a given spin species is:

$$E_{\text{F}} = (6N)^{1/3} \hbar\omega_{\text{ho}}.$$

Related Fermi quantities

Related to the Fermi energy, a few useful quantities also occur often in modern literature.

The **Fermi temperature** is defined as $T_{\text{F}} = \frac{E_{\text{F}}}{k_{\text{B}}}$, where k_{B} is the Boltzmann constant. The Fermi temperature can be thought of as the temperature at which thermal effects are comparable to

quantum effects associated with Fermi statistics.^[8] The Fermi temperature for a metal is a couple of orders of magnitude above room temperature. Other quantities defined in this context are

Fermi momentum $p_F = \sqrt{2mE_F}$, and **Fermi velocity**^[9] $v_F = \frac{p_F}{m}$, which are the momentum and group velocity, respectively, of a fermion at the Fermi surface. The Fermi momentum can also be described as $p_F = \hbar k_F$, where k_F is the radius of the Fermi sphere and is called the **Fermi wave vector**.^[10]

Note that these quantities are *not* well-defined in cases where the Fermi surface is non-spherical.

Treatment at finite temperature

Grand canonical ensemble

Most of the calculations above are exact at zero temperature, yet remain as good approximations for temperatures lower than the Fermi temperature. For other thermodynamics variables it is necessary to write a thermodynamic potential. For an ensemble of identical fermions, the best way to derive a potential is from the grand canonical ensemble with fixed temperature, volume and chemical potential μ . The reason is due to Pauli exclusion principle, as the occupation numbers of each quantum state are given by either 1 or 0 (either there is an electron occupying the state or not), so the (grand) partition function \mathcal{Z} can be written as

$$\mathcal{Z}(T, V, \mu) = \sum_{\{q\}} e^{-\beta(E_q - \mu N_q)} = \prod_q \sum_{n_q=0}^1 e^{-\beta(\epsilon_q - \mu)n_q} = \prod_q (1 + e^{-\beta(\epsilon_q - \mu)}),$$

where $\beta^{-1} = k_B T$, $\{q\}$ indexes the ensembles of all possible microstates that give the same total energy $E_q = \sum_q \epsilon_q n_q$ and number of particles $N_q = \sum_q n_q$, ϵ_q is the single particle energy of the state q (it counts twice if the energy of the state is degenerate) and $n_q = 0, 1$, its occupancy. Thus the grand potential is written as

$$\Omega(T, V, \mu) = -k_B T \ln(\mathcal{Z}) = -k_B T \sum_q \ln(1 + e^{\beta(\mu - \epsilon_q)}).$$

The same result can be obtained in the canonical and microcanonical ensemble, as the result of every ensemble must give the same value at thermodynamic limit ($N/V \rightarrow \infty$). The grand canonical ensemble is recommended here as it avoids the use of combinatorics and factorials.

As explored in previous sections, in the macroscopic limit we may use a continuous approximation (Thomas–Fermi approximation) to convert this sum to an integral:

$$\Omega(T, V, \mu) = -k_B T \int_{-\infty}^{\infty} D(\epsilon) \ln(1 + e^{\beta(\mu - \epsilon)}) d\epsilon$$

где $D(\epsilon)$ - общая плотность состояний.

Relation to Fermi-Dirac distribution

The grand potential is related to the number of particles at finite temperature in the following way

$$N = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{T,V} = \int_{-\infty}^{\infty} D(\epsilon) f \left(\frac{\epsilon - \mu}{k_B T} \right) d\epsilon$$

где производная берется при фиксированной температуре и объеме, и она появляется

$$f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$$

также известен как распределение Ферми–Дирака.

Similarly, the total internal energy is

$$U = \Omega - T \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{V,\mu} - \mu \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{T,V} = \int_{-\infty}^{\infty} D(\epsilon) f \left(\frac{\epsilon - \mu}{k_B T} \right) \epsilon d\epsilon.$$

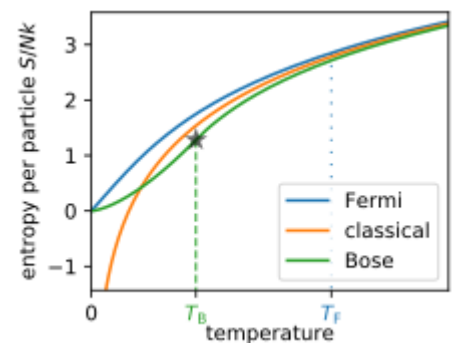
Exact solution for power-law density-of-states

Many systems of interest have a total density of states with the power-law form:

$$D(\epsilon) = Vg(\epsilon) = \frac{Vg_0}{\Gamma(\alpha)} (\epsilon - \epsilon_0)^{\alpha-1}, \quad \epsilon \geq \epsilon_0$$

при некоторых значениях g_0 , α , ϵ_0 . Результаты предыдущих разделов обобщаются на размерности d , давая степенной закон с:

- $\alpha = d/2$ for non-relativistic particles in a d -dimensional box,
- $\alpha = d$ for non-relativistic particles in a d -dimensional harmonic potential well,
- $\alpha = d$ for hyper-relativistic particles in a d -dimensional box.



Entropy vs temperature curves of classical ideal gas and quantum ideal gases (Fermi gas, Bose gas) in three dimensions ($\alpha = 1.5$) with constant N , V .

For such a power-law density of states, the grand potential integral evaluates exactly to:^[11]

$$\Omega(T, V, \mu) = -Vg_0 (k_B T)^{\alpha+1} F_\alpha \left(\frac{\mu - \epsilon_0}{k_B T} \right),$$

где $F_\alpha(x)$ – полный интеграл Ферми–Дирака (связанный с полилогарифмом). Из этого большого потенциала и его производных могут быть извлечены все термодинамические величины, представляющие интерес.

Extensions to the model

Relativistic Fermi gas

The article has only treated the case in which particles have a parabolic relation between energy and momentum, as is the case in non-relativistic mechanics. For particles with energies close to

their respective rest mass, the equations of special relativity are applicable. Where single-particle energy is given by:

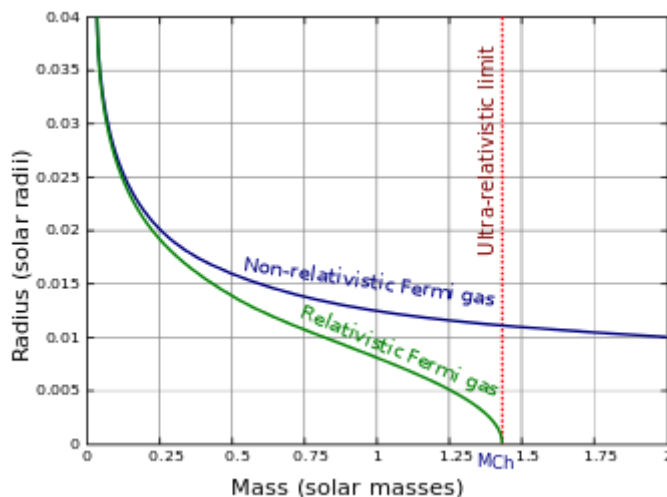
$$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}.$$

For this system, the Fermi energy is given by:

$$E_F = \sqrt{(p_F c)^2 + (mc^2)^2} - mc^2 \approx p_F c$$

где \approx равенство справедливо только в ультрарелятивистском пределе, и^[12]

$$p_F = \hbar \left(\frac{1}{g_s} 6\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3}.$$



Radius–mass relations for a model white dwarf, relativistic relation vs non-relativistic. The Chandrasekhar limit is indicated as M_{Ch} .

The relativistic Fermi gas model is also used for the description of large white dwarfs which are close to the Chandrasekhar limit. For the ultrarelativistic case, the degeneracy pressure is proportional to $(N/V)^{4/3}$.

Fermi liquid

In 1956, Lev Landau developed the Fermi liquid theory, where he treated the case of a Fermi liquid, i.e., a system with repulsive, not necessarily small, interactions between fermions. The theory shows that the thermodynamic properties of an ideal Fermi gas and a Fermi liquid do not differ that much. It can be shown that the Fermi liquid is equivalent to a Fermi gas composed of collective excitations or quasiparticles, each with a different effective mass and magnetic moment.

See also

- Bose gas
- Fermionic condensate
- Gas in a box
- Jellium
- Two-dimensional electron gas

References

- Fermi, E. (1926-11-01). "Zur Quantelung des idealen einatomigen Gases" (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/https/web.archive.org/web/20190406201635/https://ethw.org/w/images/e/e5/P1_1926_Zur_Quantelung_des_ideal_einatomigen_Gases.pdf) (PDF). *Zeitschrift für Physik* (in German). **36** (11–12): 902–912. Bibcode:1926ZPhy...36..902F (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/https/ui.adsabs.harvard.edu/abs/1926ZPhy...36..902F). doi:10.1007/BF01400221 (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/https/doi.org/10.1007%2FBF01400221). ISSN 0044-3328 (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/h

- <https://www.worldcat.org/issn/0044-3328>). S2CID 123334672 (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/https/api.semanticscholar.org/CorpusID:123334672). Archived from the original (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/https/ethw.org/w/images/e/e5/P1_1926_Zur_Quantelung_des_idealen_einatomigen_Gases.pdf) (PDF) on 2019-04-06.
2. Schwabl, Franz (2013-03-09). *Statistical Mechanics* (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/https/books.google.com/books?id=kWjwCAAQBAJ&q=classical+limit+fermi+gas). Springer Science & Business Media. ISBN 978-3-662-04702-6.
 3. Regal, C. A.; Greiner, M.; Jin, D. S. (2004-01-28). "Observation of Resonance Condensation of Fermionic Atom Pairs". *Physical Review Letters*. **92** (4): 040403. arXiv:cond-mat/0401554 (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/https/arxiv.org/abs/cond-mat/0401554). Bibcode:2004PhRvL..92d0403R (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/https/ui.adsabs.harvard.edu/abs/2004PhRvL..92d0403R). doi:10.1103/PhysRevLett.92.040403 (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/https/doi.org/10.1103%2FPhysRevLett.92.040403). PMID 14995356 (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/https/pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/14995356). S2CID 10799388 (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/https/api.semanticscholar.org/CorpusID:10799388).
 4. Giorgini, Stefano; Pitaevskii, Lev P.; Stringari, Sandro (2008-10-02). "Theory of ultracold atomic Fermi gases" (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/https/link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.80.1215). *Reviews of Modern Physics*. **80** (4): 1215–1274. arXiv:0706.3360 (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/https/arxiv.org/abs/0706.3360). Bibcode:2008RvMP...80.1215G (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/https/ui.adsabs.harvard.edu/abs/2008RvMP...80.1215G). doi:10.1103/RevModPhys.80.1215 (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/https/doi.org/10.1103%2FRevModPhys.80.1215). S2CID 117755089 (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/https/api.semanticscholar.org/CorpusID:117755089).
 5. Kelly, James J. (1996). "Statistical Mechanics of Ideal Fermi Systems" (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/https/web.archive.org/web/20180412225816/http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/jgr/pdfs/fermi.pdf) (PDF). *Universidad Autónoma de Madrid*. Archived from the original (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/www.uam.es:80/personal_pdi/ciencias/jgr/pdfs/fermi.pdf) (PDF) on 2018-04-12. Retrieved 2018-03-15.
 6. "Degenerate Ideal Fermi Gases" (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/https/web.archive.org/web/20080919073627/http://www.physics.usyd.edu.au/ugrad/sphys_old/sphys_webct/PHYS3905_SM/TSM12.pdf) (PDF). Archived from the original (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/www.physics.usyd.edu.au/ugrad/sphys_old/sphys_webct/PHYS3905_SM/TSM12.pdf) (PDF) on 2008-09-19. Retrieved 2014-04-13.
 7. Nave, Rod. "Fermi Energies, Fermi Temperatures, and Fermi Velocities" (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Tables/fermi.html). HyperPhysics. Retrieved 2018-03-21.
 8. Torre, Charles (2015-04-21). "PHYS 3700: Introduction to Quantum Statistical Thermodynamics" (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/www.physics.usu.edu/torre/3700_Spring_2015/Lectures/08.pdf) (PDF). *Utah State University*. Retrieved 2018-03-21.
 9. Nave, Rod. "Fermi level and Fermi function" (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Solids/Fermi.html). HyperPhysics. Retrieved 2018-03-21.

10. Ashcroft, Neil W.; Mermin, N. David (1976). *Solid State Physics* (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/https/archive.org/details/solidstatephysic00ashc). Holt, Rinehart and Winston. ISBN 978-0-03-083993-1.
11. Blundell (2006). "Chapter 30: Quantum gases and condensates". *Concepts in Thermal Physics*. Oxford University Press. ISBN 9780198567707.
12. Greiner, Walter; Neise, Ludwig; Stöcker, Horst (1995). *Thermodynamics and Statistical Mechanics* (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/https/archive.org/details/thermodynamicsst0000grei/page/341). Classical Theoretical Physics. Springer, New York, NY. pp. 341–386 (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/https/archive.org/details/thermodynamicsst0000grei/page/341). doi:10.1007/978-1-4612-0827-3_14 (https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.83520fc1-6439a968-569a05f5-74722d776562/https/doi.org/10.1007%2F978-1-4612-0827-3_14). ISBN 9780387942995.

Further reading

- Neil W. Ashcroft and N. David Mermin, *Solid State Physics* (Harcourt: Orlando, 1976).
 - Charles Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 1st ed. 1953 - 8th ed. 2005, ISBN 0-471-41526-X
-

Извлечено из "https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Fermi_gas&oldid=1138755506"