Перевод: английский - русский - www.onlinedoctranslator.com

Об автоколебаниях в цепях с катушками с железным сердечником.*

К
Х. Винтер-Гюнтер
Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie
(Zeitschrift für Hochfrequenztechnik)
Том. 34 августа 1929 г., № 2
стр. 41-49

Абстрактный

Самопроизвольное генерирование колебаний в цепях с катушками с железным сердечником рассматривается применительно к аналогичной механической задаче, заключающейся в том, что периодическое изменение тока намагничивания в катушках с железным сердечником приводит к пропорционально изменяющейся индуктивности.

Давно известно, что при определенных условиях колебательные контуры, содержащие замкнутую катушку с железным сердечником, возбуждаемую внешней синусоидальной ЭДС, могут самовозбуждаться дополнительными колебаниями, частота которых не обязательно равна частоте внешней ЭДС, ни ее гармоника. К. Хигнер[1]экспериментально исследовал установление таких известных колебаний и с помощью энергетических соображений получил также теоретически определенные выражения (особенно относительно существующих частотных соотношений).

В этой публикации будет показано, что наиболее важное из этих явлений (т. е. самовозбуждение) также допускает вариант представления Хегнера. Я пришел к этому через лорда Рэлея.[2]работа по механике, в которой рассматривается пример расщепления частот. Мне кажется, что применение этого метода к нашей задаче в силу его простоты имеет немаловажное значение.

Здесь следует кратко изложить суть работы Рэлея, поскольку она облегчает понимание электромагнитной аналогии:

Выученный аккорд прикреплен к концу камертонной вилки, которая колеблется с частотой ω.о в направлении хорды. Следовательно, натяжение хорды испытывает периодическое изменение с одной и той же частотой. Первоначально нет никакой причины для поперечных колебаний. Однако при определенных условиях хорда действительно совершает мощные поперечные колебания.[3] на частоте ωо/2. Для объяснения явления поперечных колебаний системы Рэлей составил уравнение[я]

$$\frac{г2\,ты}{дт2} + \alpha\frac{дю}{дт} + н_2 \cdot ты - 2\beta\,грех\,ю_о т \cdot ты = знак\ равно 0$$

---

* Перевод Дж. Ф. Корума, National Electrodynamics, 31 июля 2007 г.

1 К. Хигнер, "Явления самовозбуждения в системах с искаженной суперпозицией". Zeitschr. für Phys., Vol. 29, с. 91, 1924; и Том. 33, с. 85, 1925. Ссылка. Jahrbuch für drahtlosen Telegraphie und Telephonie (Zeitschrift für Hochfrequenztechnik), Vol. 27, с. 30,1926.

2 «О поддерживаемых колебаниях», Фил. Маг., Том. 15, с. 229, 1883; также см. Рэлея,Теория звука , Том. 1, с. 82, Лондон, 1926 г.

3 Ранее процитированная ссылка дает ряд дополнительных примеров из механики. В связи с этим см. также: B. van der Pol, Stabiliseering door kleine Trillingen, Physica, Nederl. Tijdschrift v. Natuurkde, 5, p. 157, 1925.

и указали, что при определенном выборе констант α, β, n_2, это дифференциальное уравнение, обладает частным интегралом

$$\text{ты}_{\text{знак равно}} A \cdot \text{грех} \left(\frac{\text{ю}_{o}}{2} \text{т} - \text{ф} \right).$$

Электромагнитная аналогия этой механической задачи обычно формируется в виде колебательного контура, емкость или индуктивность которого периодически изменяется во времени. Последнее имеет место, если цепь содержит катушку с железным сердечником, намагниченную переменным током. Таким образом, индуктивность катушки подвергается периодическому изменению (см. ниже). *тем же* частоты как намагничивающий переменный ток для случая, когда дополнительно накладывается постоянный ток, но *двойная частота* если постоянная составляющая отсутствует.

Теперь будет показано, что самовозбуждение в подобных системах, аналогичных механическим примерам, можно объяснить периодичностью самоиндукции.

В следующем разделе будет представлена самоиндукция катушки с железным сердечником как периодическая функция времени. В последующих разделах будут рассмотрены самовозбуждения в простых колебательных контурах с катушками с железным сердечником (с намагничиванием постоянным током и без него), и, наконец, расширение формулировки Рэлея приводит к описанию *соединенный* системы с катушками с железным сердечником.

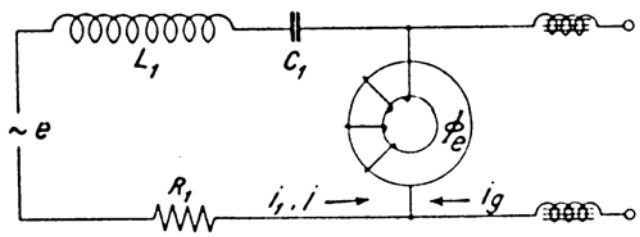


Рис. 1. Колебательный контур с катушкой с железным сердечником и постоянным подмагничиванием.

1. Катушка с железным сердечником как периодически изменяющаяся индуктивность.

Рассмотрим катушку с замкнутым железным сердечником, с магнитным потоком Φ_e который имеет магнитное смещение постоянным током i_r, в колебательном контуре с емкостью C_1. Пусть индуктивность L_1 а сопротивление рассеяния равно R_1. (Рисунок 1) Пусть внешняя синусоидальная электродвижущая сила e с частотой ω_o применяться к цепи. Следовательно, дифференциальное уравнение цепи имеет вид

$$\frac{\text{г}\Phi_e}{\text{ди}_1} \cdot \frac{\text{ди}_1 + \text{л}}{\text{дт}}_1 \cdot \frac{\text{ди}_1}{\text{дт}} + \text{я}_1 p_1 + \frac{1}{C_1} \int \text{я}_1 \text{дт} \quad (1)$$

$$\text{знак равно} E \text{грех} (\text{ю}_o \text{т} - \text{ф}) \quad _{\text{знак равно}} e_o$$

$я_1 \text{ знак равно} Дж_1 \text{грех}(ю_о т)$

как это обычно достигается, если индуктивность L_eдля катушки с железным сердечником, определенной согласно Шунка-Ценнека,[4]вводится.

По методу малых колебаний теперь на ток i должен быть наложен дополнительный ток i_1с требованием, чтобы $i<<i_1$. Из-за этого предположения в первом приближении дифференциальное уравнение для переменного тока имеет вид:

$$\begin{gathered} \frac{г\Phi_e(я_1+я)}{г(я_1+я)} \cdot \frac{г(я_1+я)}{дт} \\ \text{знак равно} \frac{г\Phi_e(я_1)}{г(я_1)} \cdot \frac{г(я_1+я)}{дт} + я \cdot \frac{г - г\Phi_e(я_1)}{дт - дИ_1} \cdot \frac{дт}{}, \\ \frac{г\Phi_e(я_1)}{дИ_1} \cdot \frac{г(я_1+я)}{дт} + я \cdot \frac{г - г\Phi_e(я_1)}{дт - дИ_1} + л_1 \cdot \frac{г(я_1+я)}{дт} \\ + p_1(я_1+я) + \frac{1}{C_1}\int(я_1 + я)дт \text{ знак равно} е \end{gathered} \tag{2}$$

Следовательно, уравнение для наложенных колебаний имеет вид:

$$\frac{г\Phi_e}{дИ_1} \cdot \frac{дИ}{дт} + я \cdot л_1 \frac{дИ}{дт} + я \cdot \frac{г - г\Phi_e}{дт - дИ_1} + я \cdot p_1 + \frac{1}{C_1}\int там \text{ знак равно} 0. \tag{3}$$

Коэффициенты $\frac{г\Phi_e}{дИ_1}$ и $\frac{г - г\Phi_e}{г т - дИ_1}$ а теперь функции i_1, и поэтому являются периодическими функции времени,[5]и может, как показано ниже, быть представлено следующим рядом Фурье:

$$\frac{г\Phi_e}{дИ_1} \text{ знак равно} л_о + к_1 \text{грех } ю_о т + к_2 \text{грех } 2ю_о т + к_3 \text{грех } 3ю_о т + \ldots \tag{4}$$

и поэтому,

$$\begin{aligned} \frac{г - г\Phi_e}{дт - дИ_1} \text{ знак равно} ю_о к_1 \text{потому что} ю_о т - 2ю_о к_2 \text{грех } 2ю т_о \\ + 3ю_о к_3 \text{потому что } 3ю_о т - \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

В этих уравнениях L_oи $к_н$являются функциями амплитуды J_1намагничивающего переменного тока и наложенного постоянного тока, $i_г$.

Согласно Рэлею, при определенных условиях, благодаря периодичности коэффициентов, уравнение (3) будет иметь стационарные решения для i, которые дают исходное наложенное решение уравнения (1) для i_1и последующее самовозбуждение нашей системы. Для этого исследования коэффициенты ряда в уравнении (5) должны быть рассчитаны как функции J_1 и $Я_г$:

---

[4] Этот Ярбух, Vol. 19, с. 117, 1922. [См. Сноску в примечании ii.]

[5] В уравнении (3) $dФ_e/ди_1$имеет смысл периодически меняющейся самоиндукции.

а) л₀и кнв случае чистой намагниченности переменного тока (iг= 0).

Как обычно, можно воспользоваться формулировкой Дрейфуса.IIдля аналитического представления кривой намагничивания железа:

$$\Phi_e \quad \text{знак равно} л_м \text{арктг}(д \bullet я_1) + \quad л' Я_1 \tag{6}$$

где, как и выше, я₁= Дж₁грех ω₀т . Итак, прежде всего имеем:

$$\frac{г\Phi_e}{ди_1} \quad \underset{\text{знак равно}}{\frac{л_м}{1 + д_2 я_2}} + \underset{\text{знак равно}}{л} \quad \frac{л_м}{1 + д_2 \ \ д_{ж1}^{2} \text{грех}^{2} ю_о т} + \ л' \tag{7}$$

Отсюда следует, что dΦe/ди₁имеет основную частоту 2ω₀, и, следовательно, удвоить частоту генератора. Следовательно, к₁= к₃= к₅= 0 в уравнениях (4) и (5). Кроме того, коэффициенты уравнений (4) и (5) дают следующее:

$$\begin{aligned} л_о \quad & \underset{\text{знак равно}}{\frac{1}{2\pi}} \int_0^{2\pi} \frac{г\Phi_e}{ди_1} \bullet г(ю_о т) \\ & \underset{\text{знак равно}}{\frac{1}{2\pi}} \int_0^{2\pi} \frac{л_м г(ю_о т)}{1 + д_2 д_{ж_1}} + л' \quad \underset{\text{знак равно}}{л'} + \frac{л_м}{\sqrt{1 + д_2 д_{ж_1}}} \end{aligned} \tag{8}$$

$$к_н \quad \underset{\text{знак равно}}{\frac{1}{\pi}} \int_0^{2\pi} \frac{г\Phi_e}{ди_1} \text{потому что} n\omega_о т д(ю_о т) \quad \ldots \underset{\text{знак равно}}{к} 2, 4, 6 \ldots \tag{9}$$

Из уравнения (9) следует

$$\begin{aligned} к_2 \quad & \underset{\text{знак равно}}{\frac{4 л_м}{д_2 д_{ж_1}}} \bullet \frac{1 + \frac{д_2 \bullet д_{ж_1}}{2}}{\sqrt{1 + д_2 д_{ж2_1}}} - 1 \\ к_1 \quad & \underset{\text{знак равно}}{1 + \frac{2}{д^2 д_{ж2_1}}} - к_2 - (л_о - л') \\ к_н \quad & \underset{\text{знак равно}}{1 + \frac{д_2 д_{ж2}}{2}} \underset{\text{знак равно}}{\frac{д_2 д_{ж_1}}{4}} \left(к_{н-2} + к_{н+2}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

Члены sin не появляются в ряду Фурье (поскольку iг= 0). Следовательно, получаем результат:

$$\frac{г\Phi_e}{ди_1} \quad \text{знак равно} л_о + к_2 \cos 2ю_о т + к_4 \text{потому что} 4ю_о т + \ldots \tag{11}$$

и следовательно

$$\frac{г-гФ}{дт-ди1}-\frac{e^{-}}{-}\ \text{знак равно}\ ю_{о}\{2к_{2}\text{грех}\ 2ю_{о}т+\quad 4к_{4}\text{грех}\ 4ю_{о}т+\ ...\} \qquad (12)$$

значения $\frac{л_{о}}{л_{м}}, \frac{к_{2}}{л_{м}л_{м}}, \frac{к_{4}}{}$ изображены на рис. 2 в зависимости от q и J_1.

Значение индуктивности L_e катушки с железным сердечником, определяемой по Шунк-Ценнеку,III получается из L_o и $к_2$: $ω_о л_е Дж_1$ потому что $ω_о$t - основное колебание напряжения катушки, если ток в катушке $i_1 = Дж_1 \text{грех}\ ω_о т$. Так как полное напряжение на катушке равно $\frac{гФ_e}{ди_1} \cdot \frac{ди}{дт}$ следует что

$$ю_{о}Л_{е}\ \cdot\ _{Дж1\ \text{знак равно}}\ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{гФ}{ди_1}e^{\cdot}\ \frac{ди_1}{дт}\ \text{потому что}\ ю_{о}т\ д(ю_{о}т\ \text{знак равно}$$

$$\text{знак равно}\ \frac{ю_{о}Дж_1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{гФ_{e}\text{-}1+\text{косинус}\ 2ю_{о}т\text{-}}{ди_1}\ \frac{--}{-}\ \frac{}{2}\ \frac{--}{-}\ г(ю_{о}т) \qquad (13)$$

Сравнивая выражения (8) и (9) с уравнением (13), получаем:

$$Л_{е}\ \text{знак равно}\ л_{о}+\ \frac{к_2}{2} \qquad \text{(см. рис. 2)} \qquad (14)$$

(Л' + $Л_м$) – максимальное значение L_e и L_o.

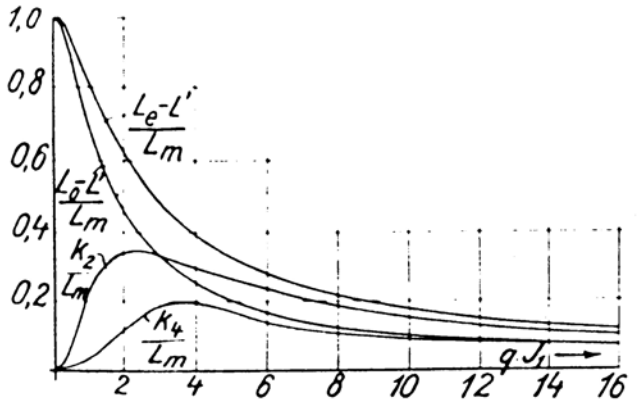


Рис. 2. Первые коэффициенты ряда Фурье для $dФ_e/ди_1$ в железном сердечнике, без постоянного тока

намагниченность смещения в зависимости от амплитуды намагничивающего синусоидального переменного тока.

б) $л_о$ и $к_н$ в случае постоянного намагничивания смещения ($i_г \neq 0$).

Для случая подмагничивания постоянным током следует признать, что зависимость напряженности поля и потока в железе существенно сложнее, так как они воспроизводятся через формулировку уравнения (6). Здесь задается аналитический расчет коэффициентов

по уравнению (4). Тем не менее качественные утверждения можно сделать и без предположения о конкретной кривой намагничивания:

1. При наличии подмагничивания основная частота функции dΦe/ди1равна частоте генератора ωo; то здесь, в отличие от асимметричного

$$Ф_e\left(я_г+я_1\right)\neq - Ф_e\left(я_г-я_1\right)$$

величина dΦe/ди1поэтому может развиваться в серии

$$\frac{гФ_e}{ди_1} \quad \text{знак равно} л_o+к_1 \text{грех} ю_o т+к_2 \cos 2ю_o т+к_3 \text{грех } 3ю_o т+ \ldots \quad . \qquad (15)$$

[Слагаемые с cos (2n – 1)ωot и sin 2nωot (n = 1, 2,...) не учитываются; то в случае суперпозиции постоянного и синусоидального переменного тока (i1= Дж1грех ωot) напряжение железной катушки можно представить в виде следующего ряда[6](без учета гистерезиса и пробоя переменного тока):

$$\frac{гФ_e}{ди_1} \cdot \frac{ди_1}{} \quad \text{знак равно} г_1 \text{потому что} ю_o т+г_2 \text{грех } 2ю_o т+г_3 \cos 3ю_o т+ \ldots дт$$

что непосредственно следует из составляющих уравнения (15).]

2. Здесь впервые появились интересные новые коэффициенты k1, к3, ... вытекают из уравнения (15), как легко видеть. Они равны нулю, если яг= 0 или Дж1= 0 (см. также), или если iг= ∞ или J1= ∞. По этой причине следует ожидать, что значения k1, к3, ... проходят через максимумы для случая постоянного ir и переменная J1а также для переменной irи постоянная J1.

II. Самовозбуждение колебаний на частоте генератора и их интегральные кратные.

(Катушки с железным сердечником с чистой намагниченностью переменного тока.)

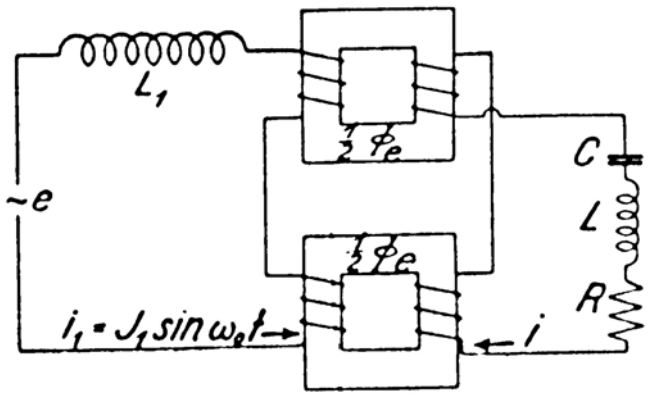


Рис. 3. Двухжильное соединение без наложенного постоянного тока.

[6]См.: R. Strigel, this Jahrbuch, Vol. 29, c. 10, 1927.

Ясно, что, рассматривая принципиальную схему, показанную на рис. 1, можно увидеть в двухжильном контуре (рис. 3), уже использованном К. Хегнером,[7] суть явления самовозбуждения: 2 эквивалентных закрытых железных трансформатора (пусть магнитный поток каждого трансформатора равен ½Фе) имеют последовательно соединенные первичные обмотки, подключенные к генератору на частоте ω₀ через произвольную, очень большую дроссельную катушку, L1. Его вторичные обмотки соединены между собой встречно через колебательный контур (L, C, R). Тем самым достигается периодическое изменение индуктивности во вторичной цепи соответственно на частоте первичного тока i1 = Дж1грех ω₀t , в то время как наведенному первичным током напряжению противодействует.

Из раздела I уравнения (3) и (11), если ряд для dФе/ди1 усекается после второго члена, дифференциальное уравнение для тока во вторичной цепи имеет вид

$$(л_о + к_2 \cos 2ю_о т) \quad \frac{ди}{дт} + л\frac{ди}{дт} + я(р - 2ю_о к_2 \text{грех } 2ю_о т) + \frac{1}{С_1}\int \text{там знак равно } 0 . \tag{1}$$

Согласно Рэлею, это уравнение обладает частным интегралом

$$я \text{ знак равно } А \cdot \text{грех}(ю_о т - ф) \tag{2}$$

предполагая, что L достаточно велико, чтобы гармониками i можно было пренебречь, и, кроме того, что выполняются следующие условия настройки вторичной обмотки.

$$\begin{matrix} - \\ = ю_о л - \\ - \end{matrix} \quad \begin{matrix} - \\ \frac{1}{ю_о} С \\ - \end{matrix} \quad \begin{matrix} - \\ = - ю_о - \\ - \end{matrix} \quad \begin{matrix} - \\ л_о - \\ - \end{matrix} \quad \begin{matrix} - \\ \frac{к_2}{2} \cdot \cos 2ф \\ - \end{matrix} \quad \begin{matrix} - \\ а \\ - \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} - \\ -- \\ - \end{matrix}$$

$$\text{знак равно} \quad - \quad ю_о \cdot \frac{к_2}{2} \text{грех } 2ф \quad \begin{matrix} - \\ -- б \end{matrix} \tag{3}$$

(Индуктивность первичной обмотки выбирается такой большой, чтобы можно было пренебречь реакцией первичной обмотки на колебания L, C, R.)

Уравнения (3a) и (3b) являются результатом подстановки уравнения (2) в уравнение (1) и утверждения следующего: автоколебания начинаются во вторичной обмотке показанного соединения цепи на рисунке 3, на частоте генератора, если (а) $ю_о л$ знак равно $\frac{1}{ю_о С}$ (при условии, что $L_о << L$), и если (б) энергетическое условие, уравнение (3b), выполняется. Соответственно, колебания возможны только в том случае, если $р \leq ю_о \frac{к_2}{2}$ (sin 2φ < 0). Из отношения k_2 к амплитуде намагниченности ток, Дж12, можно сделать вывод, что колебания во вторичном контуре как ниже, так и выше определенных значений J_1, не может быть сохранен.

Если в развитии раздела I уравнение (11) урезать после первых трех членов, то дифференциальное уравнение для вторичного тока будет выглядеть так:

---

[7] Zeitschrift für Physik, Vol. 33, с. 85 и последующие, 1925 г.

$$(л_0 + к_2 \cos 2ю_0 т + к_4 \text{потому что } 4ю_0 т + л) \quad \frac{ди}{дт}$$
$$+ (р - 2ю_0 к_2 \text{грех } 2ю_0 т - 4ю_0 к_4 \text{грех } 4ю_0 т) я \quad + \frac{1}{С_1} \int там \text{ знак равно } 0 \tag{4}$$

с частным интегралом[8]

$$я \text{знак равно } А \cdot \text{грех}(2ю_0 т - ф) \tag{5}$$

при соблюдении этих условий:

$$\begin{aligned} -2ю_0 л - \frac{1}{2ю_0 С} &= -2ю_0 л_0 - \frac{к_4}{2} \cdot \cos 2ф \\ р \text{ знак равно } 2ю_0 \cdot \frac{к_4}{2} &\cdot \text{грех } 2ф \end{aligned} \quad \begin{matrix} а \\ \\ б \end{matrix} . \tag{6}$$

В соответствии с этим возбуждается октава (удвоение) колебаний генератора при настройке вторичного контура примерно на частоту $2\omega_0$. Поскольку из рис. 2 k_4, как $к_2$, является функцией амплитуды тока намагничивания J_1, то уравнение (6) может снова выполняться только в определенном диапазоне значений J_1.

Наконец, если весь ряд из раздела I уравнения (11) подставить в дифференциальное уравнение для вторичного тока, то таким же образом получаются условия установления во вторичном контуре колебания, частота которого равна любой четной или нечетное целое кратное частоты генератора.

III. Самовозбуждение колебаний на половинной частоте генератора и их интегральные кратные.

(Катушки с железным сердечником с переменным и постоянным намагничиванием.)

Схема, показанная на рис. 4, отличается от аналогичной на рис. 3 только тем, что на железном сердечнике расположена третья обмотка, по которой протекает постоянный ток. Согласно Иб серия

$$\frac{гФ_е}{ди_1} \text{ знак равно}_{л_0} + к_1 \text{грех} ю_0 т + к_2 \cos 2ю_0 т + к_3 \text{грех } 3ю_0 т + \ldots \quad . \tag{1}$$

справедливо для зависимости от времени функции $d\Phi_e/ди_1$. Изменение индуктивности вторичной цепи имеет тот же период, что и ток цепи генератора, $i_1 = Дж_1 \text{грех } \omega_0 т$.

Следовательно, дифференциальное уравнение для тока во вторичной цепи имеет вид

[8] Как обычно, в дальнейшем предполагается, что L достаточно велико, так что ряд Фурье для i дает член, который преобладает над всеми остальными.

$$(Л_о + к_1 \text{грех} ю_о т + \ldots + л) \quad \frac{ДИ}{Дт} + (р + ю_о к_1 \text{потому что} ю_о т - 2 ю_о к_2 \text{грех} 2 ю_о т + \ldots) я + \frac{1}{С_1} \int \text{там знак равно} 0 . \tag{2}$$

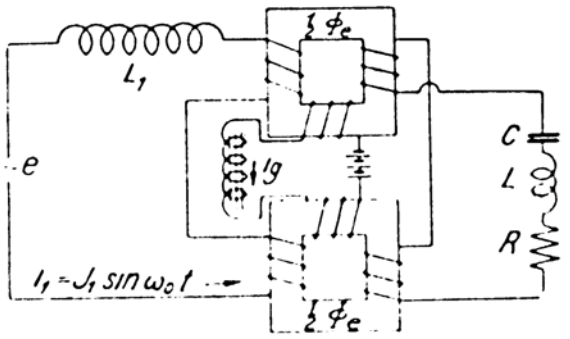


Рисунок 4. Двухжильное соединение с суперпозицией постоянного тока.

При тех же предположениях, что и в предыдущем разделе, из этого уравнения следует, что во вторичной цепи устанавливается колебание на половине частоты генератора (ω₀/2), либо целое кратное ему (nω₀/2), если выполняются следующие уравнения условий:

$$\begin{matrix} - \\ - \\ -н \frac{ю_о}{2} л - \frac{1}{н \frac{ю_о}{2} С} \\ - \\ - \\ - \end{matrix} \begin{matrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{matrix} = -н \frac{ю_о}{2} \begin{matrix} - \\ - \\ - \end{matrix} Л_о - \frac{К_н}{2} \bullet \cos 2\phi \begin{matrix} - \\ - \\ - \end{matrix} \begin{matrix} а \\ - \\ - \\ - \\ - \\ -

подключение схемы было таким же, как на рис. 3; частота генератора была $\omega_0 = 2\pi \cdot 1000$ сек$^{-1}$; вторичная цепь (без железного сердечника) была настроена чуть выше $2\omega_0$.

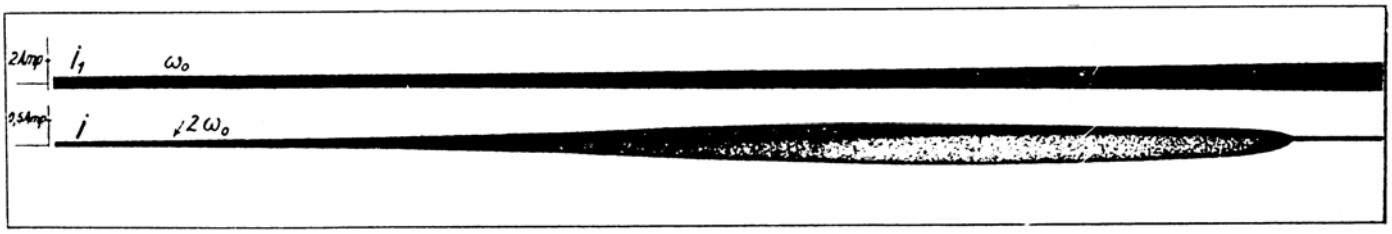


Рисунок 5. **Удвоение частоты при двухжильном соединении. Амплитуда тока намагничивания, i_1, постепенно увеличиваясь во время записи.**

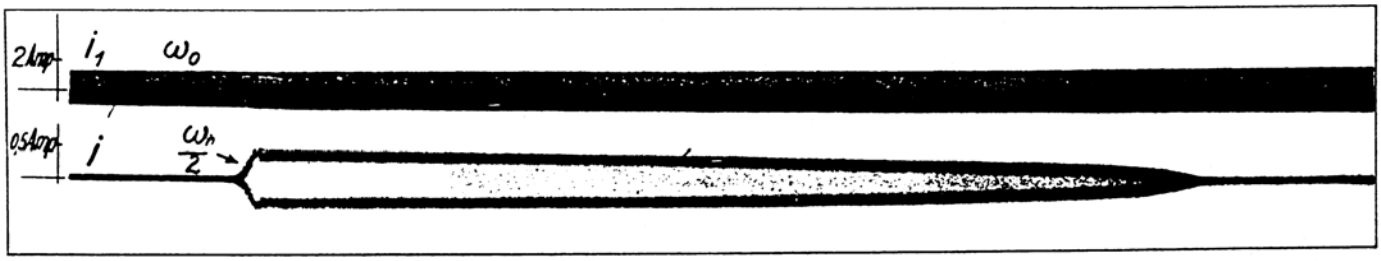


Рисунок 6. Аналогично для уменьшения частоты вдвое.

Напряжение генератора, а значит, и амплитуда J_1тока намагничивания i_1, постепенно увеличиваясь во время записи. Определенные значения амплитуды (а вместе с тем и k_2, ср. рис. 2) установившиеся колебания i в изначально обесточенном контуре L, C, R на частоте $2\omega_0 = 2\pi \cdot 2000$ сек$^{-1}$, последняя снова исчезала при еще более высоких значениях J_1(согласно прилагаемому обсуждению уравнения (6) в разделе II).

В качестве примера раздела III осциллограмма на рис. 6 показывает знакомое деление частоты на два для железных сердечников со смещающим намагничиванием. Схема показана на рис. 4. Три обмотки имеют одинаковое число витков ($i_r = 2$ ампера). Контур L, C, R был примерно настроен на частоту ½ ω_0($\omega_0 = 2\pi \cdot 1000$ сек$^{-1}$). Как и в предыдущем примере, колебания i появляются во вторичном контуре (на этот раз на половине частоты генератора) только в некоторой области амплитуды J_1тока намагничивания i_1. Это также согласуется с теорией (ср. уравнение (3) раздела II), поскольку согласно соображениям раздела I для постоянного постоянного тока i_r, k_1должен иметь тот же курс, что и k_2на рисунке 2.

Согласно всем этим экспериментам настройка схемы генератора не имеет значения, пока $i \ll i_1$. В нашем случае очень большая собственная индуктивность подключена между генератором и первичкой трансформаторов.

IV. Самовозбуждение независимых колебаний в связанных системах.

В дополнение к рассмотренным в предыдущих разделах явлениям самовозбуждения для случая двух связанных колебательных контуров, один из которых содержит катушку с железным сердечником, два колебания с частотами ω1и ω2(ω1≠ ю2≠ юо), по которым результирующие амплитуды тока развиваются в маятниковых условиях.[9,в]

Здесь расширение формулировки Рэлея, полученное из периодичности самоиндукции, также позволяет установить эти наложенные колебания (фактически колебания, для которых, согласно Хегнеру, соотношение частот nωо= ш1+ ш2, для n = 1, 2, ..., существует). Важный практический случай, 2ωо= ш1+ ш2(железный сердечник с чистой намагниченностью переменного тока) будет рассмотрен в следующем примере (см. рис. 7).

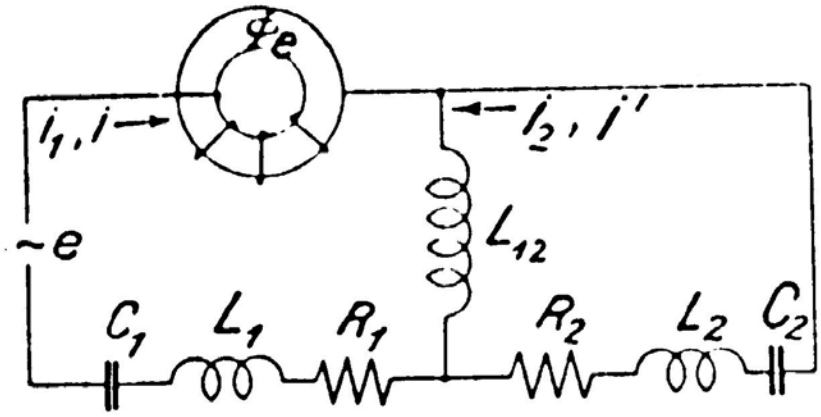


Рисунок 7. Связанный контур, который при определенных условиях может возбуждать колебания, заданные соотношением частот 2ωо= ш1+ ш2.

Для этого соединения цепи снова существует требование, чтобы индуктивность без железа была больше по сравнению с катушкой с железным сердечником.

Пусть напряжение генератора равно: e = E sin (ωот – ф).

Уравнения системы:

$$\begin{aligned} &\frac{d\Phi_e}{di_1}\cdot\frac{di_1}{dt}+\ l_1\cdot\frac{di_1}{dt}+\ p_1 i_1 \\ &\quad+\ \frac{1}{C_1}\int i\,dt+l_{12}\frac{d(i_1+i_2)}{dt}\ =\ e \\ &l_2\cdot\frac{di_2}{dt}+p_2 i_2+\ \frac{1}{C_2}\int i\,dt+l_{12}\frac{d(i_1+i_2)}{dt}\ =\ 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

[9] В дополнение к работе Heegner см.: Plendl, Sammer, Zenneck, этот журнал, Vol. 26, с. 104, 1925.

обладают, прежде всего, решением $i_1 = Дж_1 грех\ \omega_о t$, который, опять же, таким образом получается для случая, когда катушка с железным сердечником заменена определенной индуктивностью Шунка-Ценнека, L_e. Как и в случае несвязанной системы, из уравнения (1) приходим к уравнениям автоколебаний этой системы, заключающихся в том, что малые колебания первичного тока i ($i<<i_г$) накладываются на вторичный ток i'. Результат:

$$\begin{array}{l} \dfrac{г\Phi_e}{ди_1} \cdot \dfrac{ди_1}{дт} + я \cdot \left[\dfrac{г}{г_т} \dfrac{г\Phi_e}{ди_1} \right] + л_1 \left[\dfrac{ди}{дт} + р_1 я \right] \\ \qquad + \dfrac{1}{C_1} \int там + л_{12} \dfrac{г(я+я')}{дт} \text{ знак равно } 0 \\ л_2 \left[\dfrac{ди'}{дт} + р_2 я' + \dfrac{1}{C_2} \int я' дт + л_{12} \dfrac{г(я+я')}{дт} \right] \text{ знак равно } 0 \end{array} \qquad (2)$$

Если выражение для $\frac{г\Phi_e}{ди_1}$ в разделе I уравнение (11) усекается после второго члена, а затем подставляется в предыдущее уравнение, получается

$$\frac{г\Phi_e}{ди_1} \text{ знак равно } \upsilon л + к_2 \cos 2ю_о т \quad и$$

$$\left[\frac{г}{дт} \frac{г\Phi_e}{ди_1} \right] = -2ю_о к_2 грех\ 2ю_о т \qquad (3)$$

Уравнению (2) будет удовлетворять выражение:

$$я \text{ знак равно } A \cdot \{грех(ю_1 т - ф_1) + грех(ю_2 т - ф_2)\} \qquad (4)$$

(следовательно, двумя стационарными колебаниями на разных частотах) при следующих условиях:[10]

[10] В b2 и d2 предполагается небольшое демпфирование. - ИКС$_ю$ - реактивное сопротивление системы, отнесенное к первичному схема, без железной катушки. $р_ю$ – сопротивление потерь, относящееся к первичной цепи аналогичной системы (для частоты ω).

$$
\begin{aligned}
&a)\ \omega_o \overset{\text{знак равно}}{=} \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\\
&b)\ Икс_{\omega 1} \overset{\text{знак равно}}{=} \omega_1 L_o - a\cdot\frac{K}{2}\ \text{потому что}(\psi_1+\psi_2)\\
&\quad Икс_{\omega} \overset{\text{знак равно}}{=} \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} + \frac{\omega L_{12}\cdot \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}}{\omega(L_{12}+L_2) - \frac{1}{\omega C_2}}\\
&c)\ Икс_{\omega 2} \overset{\text{знак равно}}{=} \omega_2 L_o - \frac{1}{a}\frac{K^2}{2}\ \text{грех}(\phi_1+\phi_2)\\
&d)\ p_{\omega 1} \overset{\text{знак равно}}{=} \omega_1\cdot a\cdot \frac{K^2}{2}\text{грех}(\phi_1+\phi_2)\\
&\quad p_{\omega} \overset{\text{знак равно}}{=} p_1 + \frac{\omega_2 L_{12}\, p_2}{\omega(L_{12}+L_2) - \frac{1}{\omega C_2}}^2\\
&e)\ p_{\omega 2} \overset{\text{знак равно}}{=} \omega_2\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{K^2}{2}\ \text{грех}(\phi_1+\phi_2)
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Уравнения (5, ae) немедленно получаются вставкой уравнения (4) в уравнение (2).

Течение вторичного тока непосредственно следует из уравнения (2b), если в него вставить выражение, данное уравнением (4) для i.

Обсуждение уравнения (5):

1. $X_н$величины в левых частях уравнений (5b) и (5c) представляют собой реактивное сопротивление системы без железной катушки относительно первичной цепи для частот ω_1и ω_2, соответственно. По предположению, когда катушка с железным сердечником мала по сравнению с катушкой без железа, из этого должно следовать, что ω_1и ω_2являются приблизительно собственными или собственными частотами системы без железной катушки; поэтому генератор должен иметь одну частоту, лежащую посередине между этими собственными частотами.
2. Из (1) следует, что частота биений, возникающих в результате этих автоколебаний (колебаний амплитуд тока), должна быть приведена в соответствие с опытом, чем теснее связь между обоими контурами, тем выше частота биений должно быть.

3. Энергетический баланс системы содержится в уравнениях (5.г, д). Прежде всего, они приводят к отношениям амплитуд обоих автоколебаний: $z\overset{\text{знак равно}}{=}\frac{p_{\omega 1}}{p_{\omega 2}}\cdot\frac{\omega_2}{\omega_1}$(в соглашение с Heegner). Кроме того, отсюда следует, что (аналогично несвязанным системам) колебания ω_1и ω_2не может поддерживаться ниже определенных значений параметр k_2, $k_2 < \frac{1}{a}\cdot\frac{2}{\omega_2}\cdot p_{\omega 2}$, то есть, что касается зависимости, представленной в Рис. 2, $k_2 = f(J_1)$, (в соответствии с опытами),[11]колебания ω_1и ω_2 обращаются в нуль выше и ниже определенных значений тока намагничивания, $Дж_1$.

[11]Plendl, Sammer, Zenneck, этот Jahrbuch, Vol. 26, c. 104, 1925.

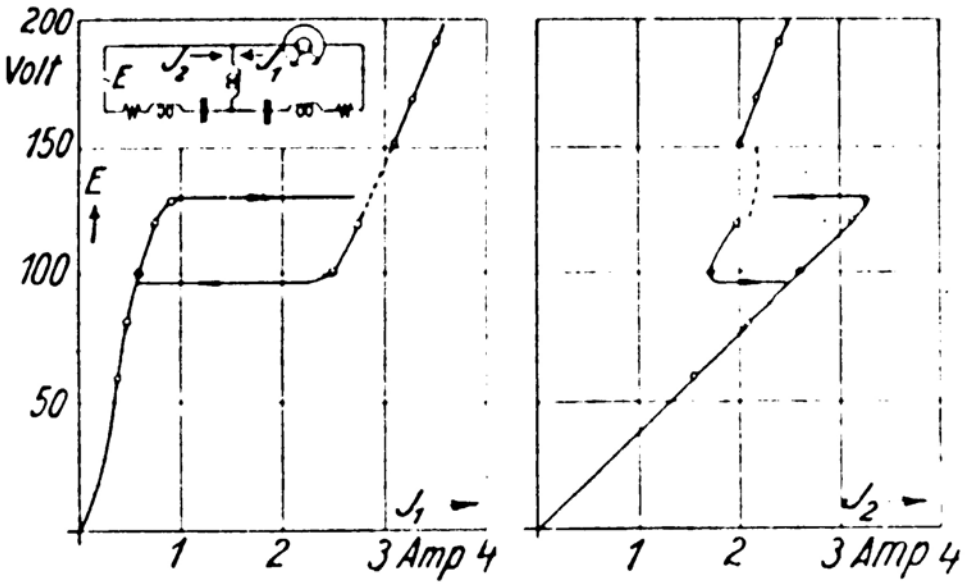


Рисунок 8. Пример вольт-амперной характеристики для сопряженного соединения показан на рис. 7. Область самовозбуждения выделена пунктиром.

4. Наконец, из ранее разработанных уравнений (1) и (2) следует, что для установления автоколебаний несущественно, лежит ли генератор в первичной цепи или во вторичной цепи рис. 7, принимая, что напряжение генератора регулируется таким образом, чтобы амплитуда намагниченности, Дж$_1$, одинаковое значение в обоих случаях.

Этот последний пункт следует проиллюстрировать несколькими краткими экспериментами:

Кривые на рисунке 8 взяты из схемы, аналогичной той, которую использовали Плендл, Саммер и Ценнек.[12]использовали. Железная катушка здесь помещена во вторичку и поэтому имеет характерную форму, при которой ток генератора скачет назад при увеличении напряжения генератора от меньших значений. При определенных частотах генератора эти скачкообразные явления накладываются на вышеупомянутые биения.[13](Штриховые части кривых.) (Плендл, Саммер и Ценнек прослеживают эти известные колебания, связанные со скачками тока намагничивания J_1 вернемся к внезапному изменению реакции вторичной обмотки на первичную.)

[12]ЦИТ.

[13]Аналогично биениям, показанным на осциллограмме (10).

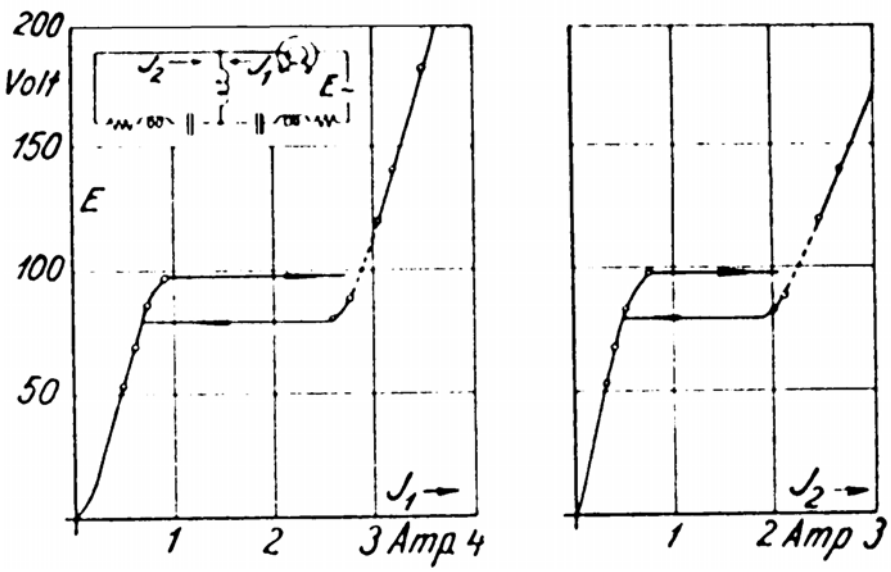


Рисунок 9. **Схема и частоты генератора те же, что и на рис. 8, но генератор находится в другой части соединения.**

Траектории, взятые на кривых рис. 9, полностью идентичны траекториям рис. 8. Схема отличается от предыдущей только тем, что генератор напрямую соединен с обмотками железной катушки. Реакция данной вторичной цепи на генератор, естественно, не зависит от амплитуды тока и обычно может быть описана постоянным вспомогательным сопротивлением в цепи генератора. Поэтому следует ожидать, что вольт-амперная характеристика генератора (см. рис. 9) не будет отличаться от характеристики простого колебательного контура с железной катушкой. Как и требует наша теория, оказывается, что одинаковые биения (пунктирные части кривых) на самом деле имеют место только при одинаковых значениях тока намагничивания J_1и одинаковые частоты генератора в схемах рис. 8 и 9. (Объяснение этих качаний, возвращающихся на характеристику действующих значений, для последних схем представляется невозможным, так как такие качания с железными сердечниками не происходят в простом гармоническом движении.ви)

Наконец, осциллограмма (10) показывает, что скачкообразные явления могут происходить совершенно независимо от маятников. Схема была такой же, как на рис. 8, за исключением того, что соединение было немного более тугим. Во время фотоэкспозиции напряжение генератора поднималось от меньших значений к большим: далее появлялся нормальный скачок тока, а после дальнейшего увеличения напряжения до более высоких значений (и тем самым J_1) появлялись биения, которые вновь гасли при еще больших значениях тока намагничивания.

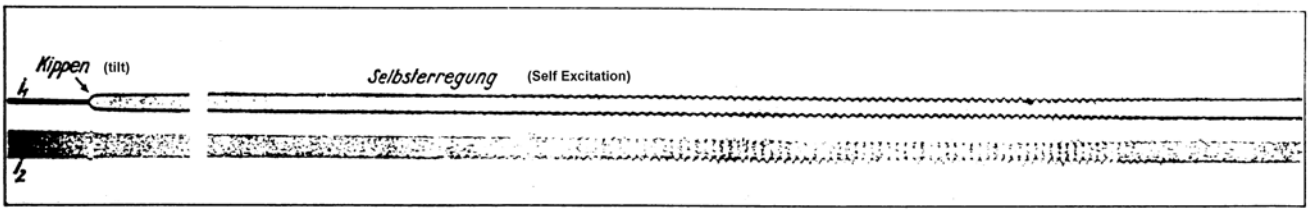


Рисунок 10. **Самовозбуждение в схеме рис. 7. В процессе фотографирования амплитуда напряжения генератора постепенно увеличивалась. [Киппен = прыжок; Selbsterregung = самовозбуждающийся]**

Выводы.

В предыдущей работе было показано, что в первом приближении автоколебания в цепях с катушками с железным сердечником такие же, как и в цепях с катушками, индуктивность которых периодически изменяется механическим устройством, а не

обладающие железными катушками. (~~На месте~~ $\frac{d\Phi_e}{dI_1}$ в разделе I, уравнение (3) есть L(t).)

Изложенная выше теория не делает никаких предположений об амплитудах автоколебаний. (В уравнении (2) раздела II величины A и т. д. являются произвольными константами интегрирования.) В основе этого лежит тот факт, что, как уже подчеркивал Рэлей, влияние результирующих колебаний на коэффициенты в дифференциальное уравнение (3) раздела I не рассматривалось. (Предполагалось, что $i \ll i_1$.) Кроме того, на том же основании теория несамостоятельного самовозбуждения непрактична в том виде, в каком ее изложил К. Хегнер.

Позвольте мне выразить глубочайшую признательность г-ну советнику Ценнеку за стимулирующий интерес, который он проявил к этой работе.

Резюме.

В предыдущей работе аналитическое изложение в целом связного описания К. Хегнером стационарного самовозбуждения в колебательных контурах с катушками с железным сердечником восходит к известной из механики форме:

С помощью метода малых колебаний было показано, прежде всего, что для случая синусоидальных токов намагничивания железные витки в колебательном контуре, самовозбуждения которого исследовались, можно заменить периодически изменяющейся индуктивностью. Следовательно, основная частота этого изменения индуктивности равна

1. Равна удвоенной частоте генератора (в случае чистой намагниченности переменного тока).
2. Равно частоте генератора (в случае постоянного и переменного намагничивания).

Амплитуды основных и гармонических колебаний этих периодических изменений индуктивности являются функциями действующих значений тока намагничивания.

Для несвязанных систем эта формулировка приводит к известному дифференциальному уравнению, решение которого (при определенном выборе коэффициентов), согласно Рэлею, обладает стационарными колебаниями с частотой, равной половине частоты изменения индуктивности или целому кратному этого. То есть в случае 1 самовозбуждения, наложенные на ток намагничивания, имеют частоту, равную частоте генератора, а в случае 2 — частоту, равную половине частоты генератора или целому кратному ей.

Уравнения связи для установления самовозбуждения легко вывести, и они приводят к количественным утверждениям, касающимся необходимой настройки системы и амплитуд намагничивающих токов.

В заключение был показан пример, из которого можно было бы вывести требования, существующие для возникновения самовозбуждения, аналогичным образом в случае связанных систем. (Колебания амплитуд тока.)

Физический институт Мюнхенского технического
колледжа. (Подано: 20 апреля 1929 г.)

Комментарии и ссылки, добавленные переводчиком

я Как отмечают многие авторы (см. Cunningham, Нелинейный анализ , 1958, с. 278, например) выражение Рэлея можно преобразовать в уравнение Матье с помощью следующей процедуры:

1. Выражение Рэлея: $$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 x - 2\beta\cos\omega_0 t\, x = 0$$

2. Чтобы удалить член в первой производной, сделайте замену переменной: $u = ye^{-\alpha t/2}$.

3. Теперь уравнение принимает вид: $$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{2} - 2\beta\cos\omega_0 t\right)u = 0$$

4. Затем возьмите

$$\omega_0 t = 2z - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\omega_0}{2}\frac{dy}{dz}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{\omega_0^2}{2}\frac{d^2y}{dz^2}$$

5. После внесения этих изменений дифференциальное уравнение становится

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{4}{\omega_0^2}\left(\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{2} - 2\beta\cos 2z\right)y = 0$$

6. Затем сделайте следующие определения

$$a = \frac{4}{\omega_0^2}\left(\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{2}\right) = 4 - \frac{2\alpha^2}{\omega_0^2}$$

$$d = \frac{2(2\beta)}{\omega_0^2}$$

7. Полученное представление теперь преобразовало выражение Рэлея в форму уравнения Матье:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (a - 2q\cos 2z)y \quad \text{знак равно} \quad 0 \qquad .$$

II Дрейфус Л., Electrotechnik und Maschinenbau, 1911. (См.: Минорский Н.,Нелинейные колебания , Ван Ностранд, 1962, с. 64; Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Е.,Теория осцилляторов , Dover, 1987, стр. 119-112.) Также см. Dreyfuss, L., Arch. мех электротехника, Vol. 2, 1913, с. 343.

III Шунк, Х., и Дж. Ценнек, «Uber Schwingungskreise mit Eisenkernspulen, (О колебательных цепях с железными катушками)», Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie (Zeitschrift für Hochfrequenztechnik), Vol. 19, 1920, с. 170.

IV Осциллограммы представляют собой отсканированные в высоком разрешении ксероксные копии журнала на микрофильме первого поколения и свидетельствуют о трагических последствиях последних 20 лет.йвека «библиотековедения»! Для

в переходного случая для*линейный*спаренные катушки, сравните анализы:

а. Пейдж, Л., и Н.И. Адамс,Принципы электричества , ван Ностранд, 1931, стр. 504–511. (Пейдж и Адамс также рассматривают управляемый случай, стр. 519-525.)

б. Смайт, WR,Статическое и динамическое электричество , Макгроу-Хилл, 2йиздание, 1950, стр. 340-346. (Обратите внимание на ошибку в уравнении (14) на стр. 345.)

в. навыки,Переходные процессы в электрических цепях , Макгроу-Хилл, 2йиздание, 1952 г., стр. 220-230.

ви В тексте написано «Schw.-Kr.», что является немецкой аббревиатурой, использованной в тексте только один раз и для которой не найдено перевода. Возможно, это «Schwingungen Kraften» (колебательные силы). Мы предполагаем, что это, вероятно, эквивалентно английскому «SHM» (Simple Harmonic Motion).